1. Одредити знак интеграла

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx = *$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left.\begin{array}{l} f(x)=x,\ f\in C([0,\pi]) \\ g(x)=\sin x,\ g(x)\geq 0\ \forall x\in[0,\pi] \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{I т.}} \exists \xi_1\in[0,\pi] \text{ т.д.} =$$

$$= f(\xi_1)\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \xi_1\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \xi_1\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\xi_1$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx = \left.\begin{array}{l} f(x)=x,\ f\in C([\pi,2\pi]) \\ g(x)=\sin x,\ g(x)\leq 0\ \forall x\in[\pi,2\pi] \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{II т.}} \exists \xi_2\in[\pi,2\pi] \text{ т.д.}$$

$$= f(\xi_2)\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\,dx = \xi_2\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx = \xi_2\,(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -2\xi_2$$

$$* = 2\xi_1 - 2\xi_2 = 2(\xi_1-\xi_2)\leq 0 \quad (\text{јер је } \xi_2\geq\pi\geq\xi_1).$$

Дакле, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx \leq 0$

2. Нека је $f\in C([0,+\infty))$ и $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, $A\in\mathbb{R}$. Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0\ \exists M=M(\varepsilon)\ \forall x>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists M_1\ \ \forall x>M_1 \Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Нека је $x > M_1$. Тада је

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{M_1} f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{M_1}^{x} f(t)\,dt$$

$$f \in C([0,+\infty)) \Rightarrow f \in C([0,M_1]) \Rightarrow f \in R([0,M_1])$$

Дакле, $\int_0^{M_1} f(t)\,dt = C_1 = const$

Даље

$$\frac{1}{x}\int_{M_1}^{x} f(t)\,dt = \left.\begin{array}{l} f(t) \in C([M_1,x]) \\ g(t) = 1 \geq 0 \ \forall t \in [M_1,x] \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{I т.}} \exists \xi \in [M_1,x] \text{ т.д. } =$$

$$= \frac{1}{x} f(\xi)\int_{M_1}^{x} g(t)\,dt = \frac{1}{x} f(\xi)\int_{M_1}^{x} dt = \frac{f(\xi)}{x}(x-M_1) = f(\xi)\left(1-\frac{M_1}{x}\right)$$

Сада посматрамо

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - A\right| = \left|\frac{C_1}{x} + f(\xi)\left(1-\frac{M_1}{x}\right) - A\right| = \left|f(\xi) - A + \frac{C_1}{x} - f(\xi)\frac{M_1}{x}\right| \leq$$

$$\leq |f(\xi)-A| + \frac{|C_1 - f(\xi)M_1|}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|C_1 - f(\xi)M_1|}{x}, \text{ за } x > M_1$$

Пошто је $C_1 - f(\xi)M_1$ - константа, то је за x довољно велико испуњено

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{|C_1 - f(\xi)M_1|}{x}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Одавде следи да важи

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = A$$

3. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

Посматрамо $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \left.\begin{array}{l} f(x)=x^n,\ f\in C([0,1]) \\ g(x)=\frac{1}{1+x},\ g(x)\geq 0\ \forall x\in[0,1] \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{I. т.}} \exists \xi\in[0,1] \text{ т. д.} =$$

$$= f(\xi)\int_0^1 g(x)\,dx = \xi^n \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \xi^n \ln|1+x|\Big|_0^1 = \xi^n(\ln 2 - \ln 1) = \xi^n \ln 2$$

Очигледно $\xi\neq 0$ (јер би у супротном добили $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$, што је нетачно јер је $\frac{x^n}{1+x}>0$ за $x\in(0,1]$)

Поред тога је $\xi\neq 1$ (јер би у супротном добили $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, односно $\int_0^1 \frac{x^n-1}{1+x}\,dx = 0$, што је нетачно јер је $\frac{x^n-1}{1+x}<0$ за $x\in[0,1)$)

Дакле, $\xi\in(0,1)$ и важи $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \xi^n \ln 2$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \xi^n \ln 2 = 0$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad p\in\mathbb{N}$

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x},\ f \downarrow \text{ на } [n,n+p],\ f(x)\geq 0\ \forall x\in[n,n+p] \\ g(x)=\sin x \\ \hline \exists \xi_n\in[n,n+p] \text{ т.д.} \end{array}\right\} \overset{\text{II ст}}{\Longrightarrow} =$$

$$= f(n)\int_n^{\xi_n} g(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_n^{\xi_n} \sin x\,dx = \frac{1}{n}\left(-\cos x\right)\Big|_n^{\xi_n} = \frac{1}{n}\left(-\cos\xi_n + \cos n\right)$$

Одавде је

$$0 \leq \left|\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\cos n - \cos\xi_n\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\cos n - \cos\xi_n\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(|\cos n| + |\cos\xi_n|\right) \leq \frac{1}{n}(1+1) = \frac{2}{n}$$

Дакле

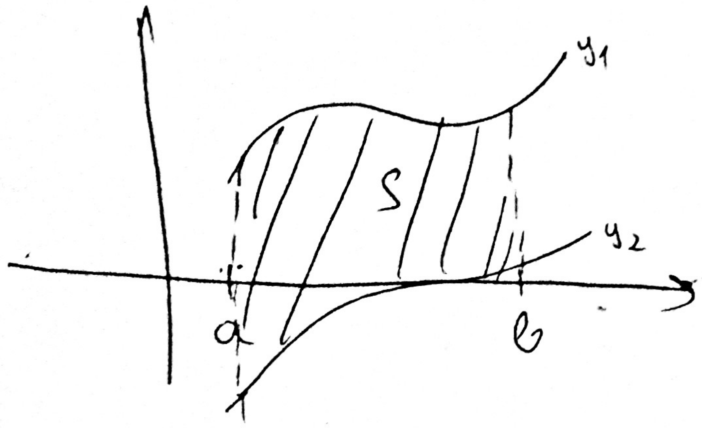
$$0 \leq \left|\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{n} \quad \text{и}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, па по упоређеном критеријуму

важи

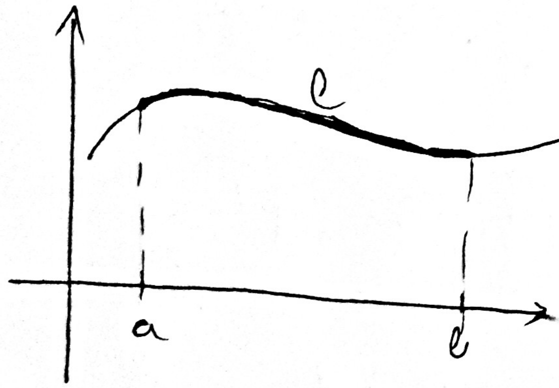
$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x}\,dx\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

Примјена одређеног интеграла



$$S = \int_a^b |y_1 - y_2|\, dx$$

↑
површина фигуре ограничене кривама y_1 и y_2 на интервалу (a,b)

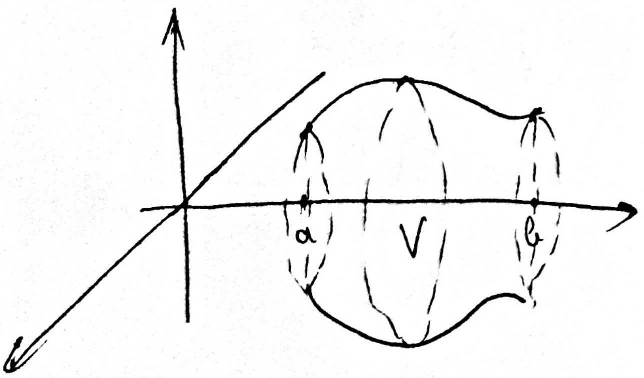


$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

↑
дужина лука криве y од тачке a до тачке b

Ако је функција задана параметарски са $(x(t), y(t))$, тада је

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$



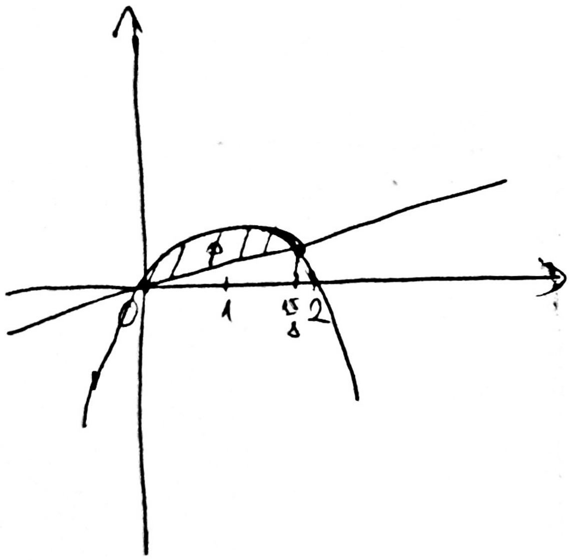
$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx$$

↑
запремина тијела које настаје ротацијом лука криве y на (a,b) око x-осе

1. Наћи површину тијела ограничено луком криве $y=-x^2+2x$ и праве $y=\frac{1}{8}x$.

Нађимо пресјек дате криве и праве.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x \\ y=\frac{1}{8}x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{8}x=-x^2+2x \\ -x^2+2x-\frac{1}{8}x=0 \\ -x^2+\frac{15}{8}x=0 \\ -x\left(x-\frac{15}{8}\right)=0 \Rightarrow x=0 \quad \vee \quad x=\frac{15}{8} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y=0 \qquad\quad y=\frac{15}{64} \end{array}$$



$$P=\int_0^{\frac{15}{8}}\left|-x^2+2x-\frac{1}{8}x\right|dx=$$

$$=\int_0^{\frac{15}{8}}\left(-x^2+\frac{15}{8}x\right)dx=$$

$$=-\int_0^{\frac{15}{8}}x^2dx+\frac{15}{8}\int_0^{\frac{15}{8}}x\,dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{15}{8}}+\frac{15}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{15}{8}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{15}{8}\right)^3}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{8}\right)^3$$

2. Найти площину фігури обмеженої кривими:

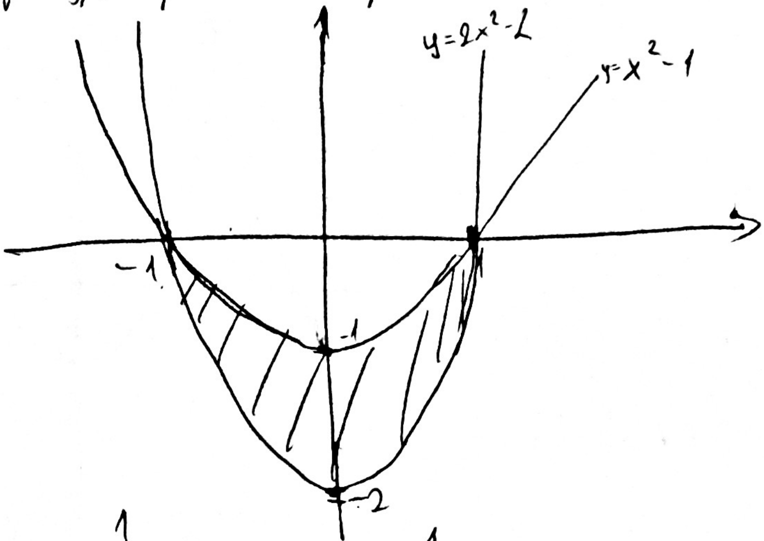
а) $y=2x^2-2$

$y=x^2-1$

$2x^2-2=x^2-1$

$x^2=1$

$x=\pm 1$



$$P=\int_{-1}^{1}|2x^2-2-x^2+1|dx=\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

б) $y=2x^2$

$x=2y^2 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{x}{2}}$

$\Downarrow$ $y=-\sqrt{\frac{x}{2}}$

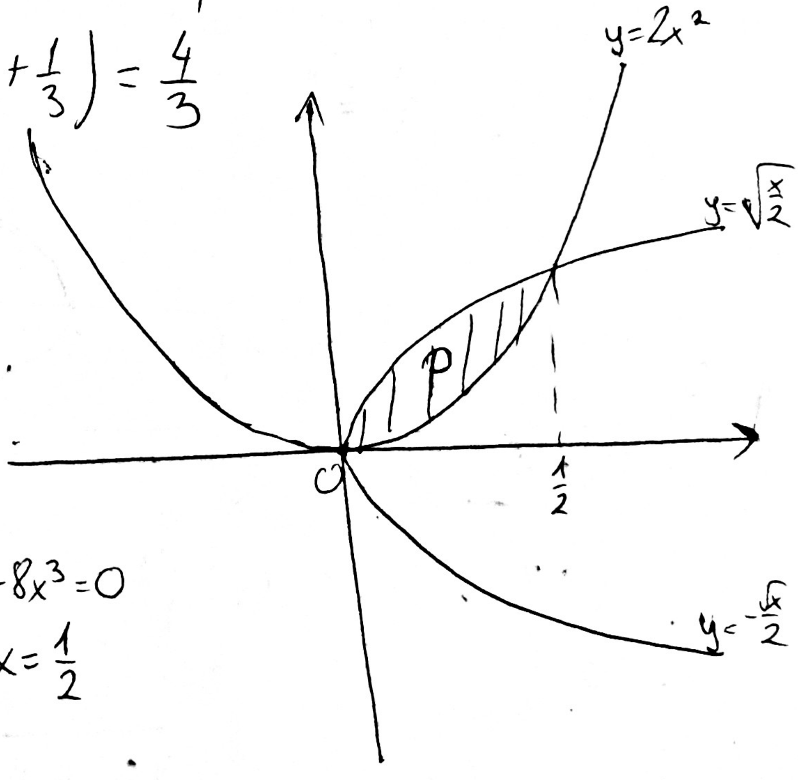
$x=2(2x^2)^2$

$x=8x^4$

$x-8x^4=0$

$x(1-8x^3)=0 \Rightarrow x=0 \ \vee \ 1-8x^3=0$

$x=\frac{1}{2}$



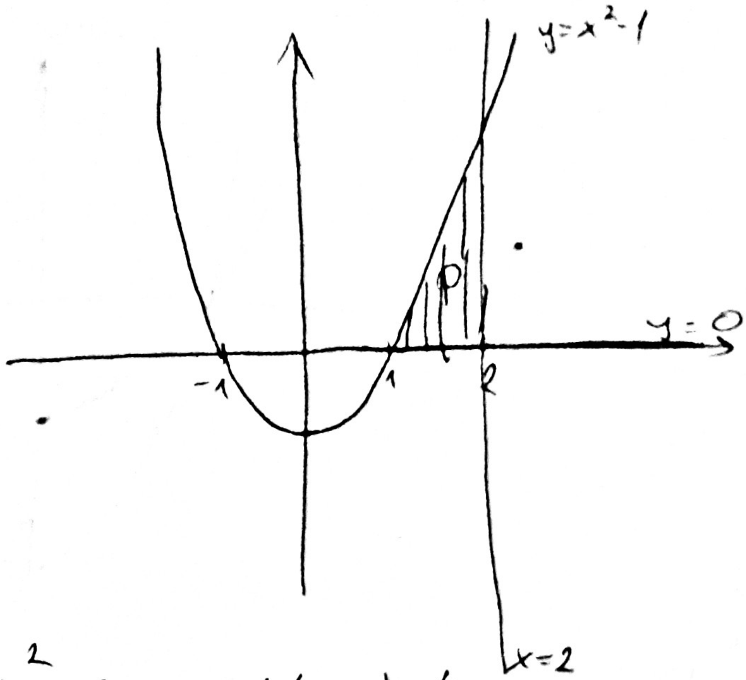
$$P=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left|2x^2-\sqrt{\frac{x}{2}}\right|dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-2x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^2dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

b) $y=x^2-1,\ y=0,\ x=2$

$x^2-1=0$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

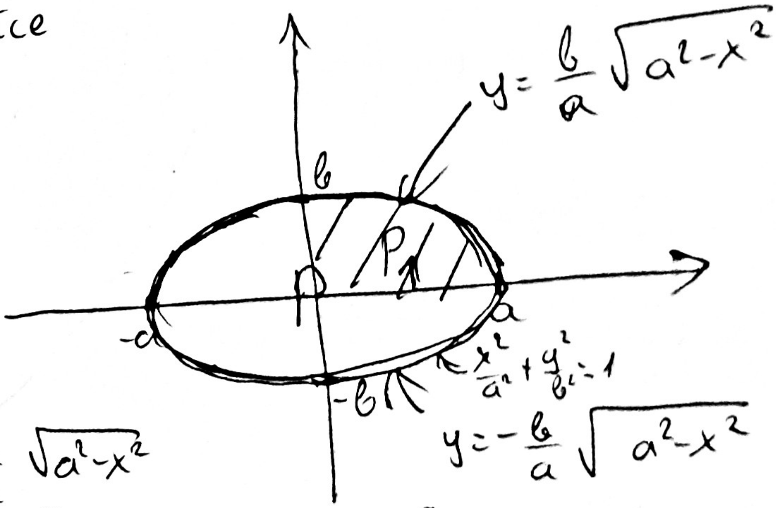


$$P=\int_1^2 |x^2-1-0|\,dx=$$

$$=\int_1^2 (x^2-1)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{8}{3}-2-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$

3. Наћи површину елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$



$P=4\cdot P_1$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \ \lor\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$P_1=\int_0^a \left|\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-0\right|dx=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array}\right]=\frac{b}{\cancel{a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot \cancel{a}\cos t\,dt=$$

$$=b\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab\pi}{4}$$

$$P=4P_1=ab\pi$$

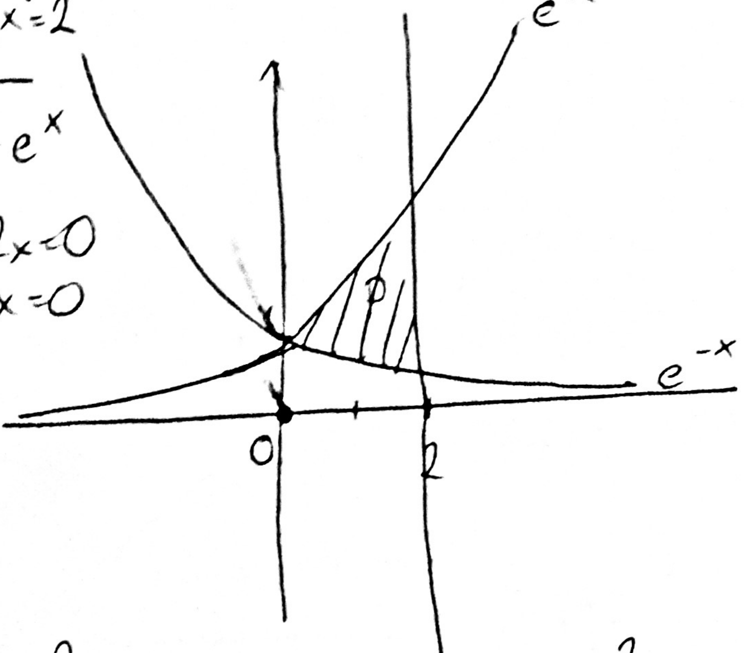
4. Наћи површину фигуре ограничене кривама:

$y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=2$

$e^x=e^{-x} \quad / e^x$

$e^{2x}=1 \Rightarrow 2x=0$

$x=0$



$$P=\int_0^2 |e^x-e^{-x}|dx=\int_0^2 (e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^2=e^2+e^{-2}-(e^0+e^0)=$$

$$=e^2+e^{-2}-2$$

5. Израчунати дужину лука криве $y=\ln x$ од $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$.

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+((\ln x)')^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\cdot x\,dx= \left[\begin{array}{c} x^2+1=t^2,\ x^2=t^2-1 \\ 2x\,dx=2t\,dt \\ x\,dx=t\,dt \end{array}\right] =$$

x	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$
t	2	3

$$=\int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\cdot t\,dt=\int_2^3 \frac{t^2\,dt}{t^2-1}=\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$

$$=\int_2^3 dt+\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}=t\Big|_2^3+\int_2^3 \frac{dt}{(t-1)(t+1)}=(3-2)+\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dt}{t+1}=$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\cdot 3}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

6. Израчунати обим кружнице $x^2+y^2=r^2$.

Кружница се може параметарски задати са

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\qquad 0 \le t \le 2\pi$$

па обим кружнице можемо израчунати формулом

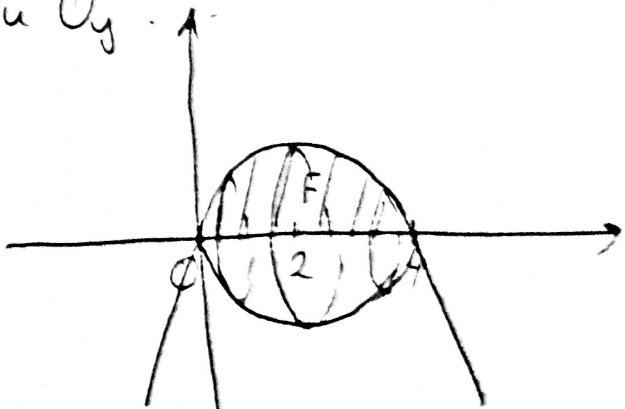
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\,dt = r\int_0^{2\pi} dt = r\cdot t\Big|_0^{2\pi} = 2r\pi$$

7. Фигура F је ограничена кривом $y=4x-x^2$ и осом Ox. Одредити запремину тијела која настаје ротацијом фигуре F око оса Ox и Oy.

Ox:

$$4x - x^2 = 0$$
$$x(4-x) = 0 \Rightarrow x=0 \lor x=4$$



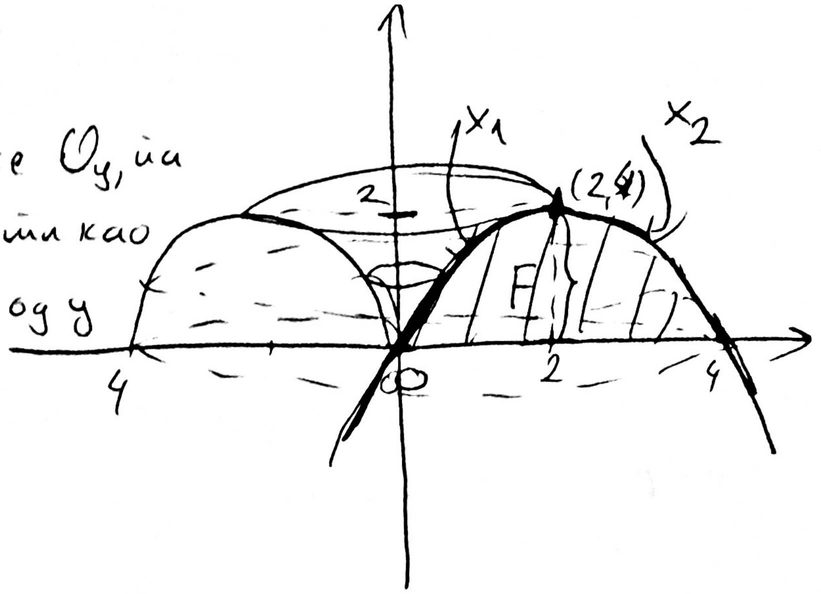
$$V = \pi\int_0^4 \left((4x-x^2)^2 - 0\right)dx = \pi\int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^4 = \pi\cdot\left(\frac{16\cdot 4^3}{3} - 2\cdot 4^4 + \frac{4^5}{5} - 0\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{16\cdot 4^3}{3} - 2\cdot 4^4 + \frac{4^5}{5}\right)$$

O_y:

Тијело ротира око осе O_y, па x морамо представити као ф-ју која зависи од y



$y = 4x - x^2$

$x^2 - 4x + y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4y}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{4-y}}{2} = 2 - \sqrt{4-y} \qquad x_2 = \frac{4+2\sqrt{4-y}}{2} = 2 + \sqrt{4-y}$$

$$V = \pi \int_0^4 (x_2^2 - x_1^2)\,dy = \pi \int_0^4 \left(4 + 4\sqrt{4-y} + 4 - y - (4 - 4\sqrt{4-y} + 4 - y)\right) dy =$$

$$= \pi \int_0^4 8\sqrt{4-y}\,dy = 8\pi \int_0^4 \sqrt{4-y}\,dy = \begin{bmatrix} 4-y=t \\ -dy=dt \\ dy=-dt \end{bmatrix} \begin{array}{c|c|c} y & 0 & 4 \\ \hline t & 4 & 0 \end{array} =$$

$$= -8\pi \int_4^0 \sqrt{t}\,dt = 8\pi \int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt = 8\pi \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = 8\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 0\right) =$$

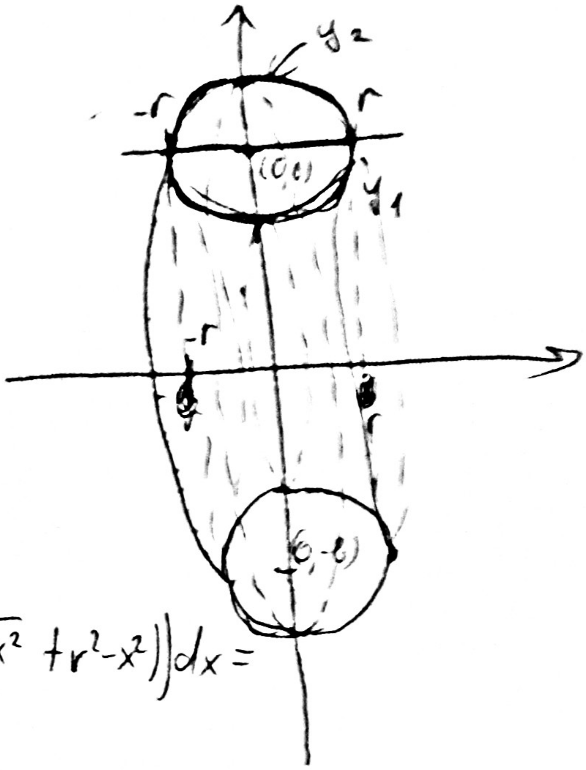
$$= \frac{128\pi}{3}.$$

8. Одредити запремину тијела које настаје ротацијом круга $x^2+(y-b)^2=r^2$, $b>r$, око осе O_x.

$(y-b)^2=r^2-x^2$

$y_{1,2}-b=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

$y_{1,2}=b\pm\sqrt{r^2-x^2}$



$y_1=b-\sqrt{r^2-x^2}$, $y_2=b+\sqrt{r^2-x^2}$

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(y_2^2-y_1^2)\,dx=$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}\left(b^2+2\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-(b^2-2\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\right)dx=$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}4\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\ldots=2br^2\pi$$